Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Daniel Palacín

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie

Blatt 6

Abgabe: 10.12.2019, 14 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Zeige, dass es in der Struktur $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{<\}$ genau einen 1-Typ $p(x)$ in $S_1^{\mathcal{Q}}(\mathbb{Q})$ gibt, welcher die Menge $\{0 < x < q\}_{q \in \mathbb{Q}^{>0}}$ enthält.

Ist der Typ $p(x)$ isoliert?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

In der Sprache $\mathcal{L}$, sei $p(\bar{x})$ ein n-Typ in der $\mathcal{L}$-Theorie T derart, dass in jedem Modell $\mathcal{M}$ von T der Typ $p(\bar{x})$ nur endlich viele Realisierungen in $\mathcal{M}$ besitzt.

a) Zeige, dass es eine Formel $\varphi[\bar{x}]$ in $p(\bar{x})$ so gibt, dass $T \models \exists^{\leq N} \bar{x} \varphi[\bar{x}]$ für eine natürliche Zahl N.

b) Ist $p(\bar{x})$ isoliert in $\mathrm{S}_n(T)$, wenn T vollständig ist?

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur derart, dass für jede Teilmenge $B \subset A$ die isolierten 1-Typen in $S_1^{\mathcal{A}}(B)$ dicht liegen. Zeige, dass für jede natürliche Zahl n und jede Teilmenge $B \subset A$ die isolierten n-Typen in $S_n^{\mathcal{A}}(B)$ dicht liegen.

Aufgabe 4 (9 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und $B \subset A$ eine Teilmenge. Betrachte die *Einschränkungsabbildung* auf die erste Variable:

$$\begin{array}{rccl} \pi: & S_2^{\mathcal{A}}(B) & \to & S_1^{\mathcal{A}}(B). \\ & q(x,y) & \mapsto & \{\varphi[x] \ \mathcal{L}_B\text{-Formel, mit } \varphi[x] \in q(x,y)\}. \end{array}$$

a) Zeige, dass π wohldefiniert und surjektiv ist.

b) Zeige, dass die Abbildung π stetig, abgeschlossen und offen ist.

c) Sei nun $p(x) = \mathrm{tp}(c/B)$ in $S_1^{\mathcal{A}}(B)$ ein realisierter Typ und betrachte die Abbildung:

$$\begin{array}{rccl} f: & S_1^{\mathcal{A}}(B,c) & \to & \pi^{-1}(p) \\ & q(y) & \mapsto & p(x) \cup \{\varphi[x,y] \ \mathcal{L}_B\text{-Formel, mit } \varphi[c,y] \in q(y)\}. \end{array}$$

Zeige, dass f wohldefiniert und bijektiv ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.